幾つかの問題(線形作用素に関連する不等式とその周辺)

AUTHOR(S):
安藤, 毅; 中本, 律男; 内山, 充; 大久保, 和義

CITATION:
安藤, 毅 ...[et al]. 幾つかの問題(線形作用素に関連する不等式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1994, 860: 98-101

ISSUE DATE:
1994-03

URL:
http://hdl.handle.net/2433/83818

数理解析研究所講究録
第 860 巻 1994 年 98-101

幾つかの問題

北大電子科学研　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)
茨城大工学部　中本　律男 (Ritsuo Nakamoto)
福岡教育大　内山　充 (Mitsuru Uchiyama)
北海道教育大札幌　大久保　和義 (Kazuyoshi Okubo)

以下は Problem Session で述べられた問題等の要約である。

安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)

M_nを $n\times n$ 複素行列全体からなる線形空間、H_n を $n\times n$ エルミート行列全体の集合とする。各 $X\in H_n$ の固有値は大きさの順に $\lambda_1(X)\geq\lambda_2(X)\geq\cdots\geq\lambda_n(X)$ と並べる。また各 $k=1,2,\cdots,n$ に対して、

$$\Lambda_k(X)\ :=\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(X)$$

とする。

M_n 上に次のノルムを考える。

$$\text{トレースノルム: } \|A\|_1=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^*A)^{1/2}$$

$$\text{数域半径: } w(A)=\sup_x\{|\langle Ax|x\rangle|:\|x\|=1\}$$

ここで、$\|\cdot\|$ で C^n 上の ユークリッドノルムを、$\langle\cdot|\cdot\rangle$ で C^n 上の内積を表すものとする。

このとき、$A\in M_n$ に対して次のことが知られている。

1. $\|A\|_1\leq 1$ である必要十分条件は、$Z\in H_n$ が存在して$\Lambda_n(\begin{bmatrix} Z & A\\ A^* & -Z\end{bmatrix})\leq 1.$

2. $w(A)\leq 1$ である必要十分条件は、$Z\in H_n$ が存在して $\Lambda_1(\begin{bmatrix} Z & A\\ A^* & -Z\end{bmatrix})\leq 1.$

3. 次に

$$w_k(A):=\sup\{\sum_{i=1}^{k}|(U^*AU)_{i,i}|:U unitary\}$$

また、

$$v_k(A):=\inf\{\Lambda_k(\begin{bmatrix} Z & A\\ A^* & -Z\end{bmatrix}):Z\in H_n\}$$

とすると、

$$w_1(A)=w(A)\text{および、}w_n(A)=\|A\|_1$$

が成り立つ。

Conjecture (C.-K. Li and H. J. Woerdeman in LAMA(to appear))

$$w_k(A) = v_k(A) \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

このことは、次のこと成り立つことと同じである。

$$w_k(A) \leq 1 \iff \Lambda_k\left(\begin{bmatrix} Z & A \\ A^* & -Z \end{bmatrix}\right) \leq 1 \quad \exists Z \in H_n.$$

また

$$\mathbf{S}_k := \{Q \in M_n \mid \exists P \; ; \; 0 \leq \begin{bmatrix} P & Q/2 \\ Q^*/2 & P \end{bmatrix} \leq 1, \; tr(P) = k/2\},$$

$$\mathbf{T}_k := \mathrm{Conv}\{J \in M_n | J^*J : \text{projection}, \ \mathrm{rank}(J) = k\}$$

とすると、Conjecture は $\mathbf{S}_k = \mathbf{T}_k$ が成り立つことととと同値である。

中本　律男 (Ritsuo Nakamoto)

$B(\mathfrak{H})$ でヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界線形作用素全体の集合とする。$A \in B(\mathfrak{H})$ に対し、$G(A)$ をそのグラフとして

$$P_A : \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \longmapsto G(A)$$

で $G(A)$ 上への射影を表わすことにする。2 つの作用素に A, B に対して、その間の gap を

$$\theta(A, B) := \|P_A - P_B\|$$

で定義する。

Faghih-Habibi はどの $A \in M_n$ に対しても

$$\theta(A, 0) = \frac{\|A\|}{\sqrt{1 + \|A\|^2}}$$

を示した。しかし、ずっと以前に McIntosh によって次が知られていた:

$$\theta(A, B) = \max\{\delta(A, B), \ \delta(B, A)\}$$

ここで

$$\delta(A, B) = \|(1 + BB^*)^{-1/2}(A - B)(1 + A^*A)^{-1/2}\|$$

とする。

$a, b \in C$ のときは、

$$\theta(a, b) = \frac{|a - b|}{\sqrt{1 + |a|^2}\sqrt{1 + |b|^2}}$$

となり、a, b の間の球面距離になっている。一般に

$$\theta(A,B) \le \|A-B\| \le (1+\|A\|^2)^{1/2}(1+\|B\|^{1/2})\ \theta(A,B)$$

となり、gap による metric と norm による metric は同値となる。

問題　作用素 A を与えたとき、gap によるエルミート作用素での最良近似を決定せよ。

[参考文献]

J. Faghah-Habibi, The gap of the graph of a matrix, LAA. 186(1993), p.55-57

A. McIntosh, Heinz inequalities and perturbation of spectral measure, Mocquarie Math. Report, 1979.

内山　充 (Mitsuru Uchiyama)

$\mathfrak{H}$ 上の symmetric な S は $\mathfrak{H}$ を拡大した空間 $\mathfrak{K}$ 上の selfadjoint 作用素に拡張に拡張される。

次の問題は K.Yosida の本に Browder の問題として述べられている。

問題　T が閉作用素で

$$D(T) \subset D(T^*),\ \|Tx\| = \|T^*x\| \quad (x \in D(T))$$

を満たすとき T は正規作用素の拡張を持つか？

内山の講演にあるように、T が閉作用素で、その極分解が可換ならば正規作用素に拡張される。

問題　T を有界な作用素としたとき $|T^n| = |T|^n$ が連続した二個の自然数について成立すれば全ての自然数について成立するか？

大久保　和義 (Kazuyoshi Okubo)

A, $B \in M_n$ のとき、A と B の *Schur* (または *Hadamard*) 積を

$$A \circ B := [a_{ij}b_{ij}] \quad (A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_n)$$

で定義する。また、$A \in M_n$ を固定したとき M_n 上の
Schur 積作用素を

$$S_A(X) := A \circ X \quad (X \in M_n)$$

で定義する。$A \in M_n$ で、$\|\cdot\|_\infty$, $w(\cdot)$ を それぞれ、M_n 上のスペクトラルノルム 、数域半径ノルムとするとき、それぞれのノルムに対する Schur 積作用素ノルムを

$$\|S_A\|_\infty := \sup\{\|A \circ X\|_\infty \mid \|X\|_\infty \le 1\},$$

$$\|S_A\|_w := \sup\{w(A \circ X) \mid w(X) \le 1\}$$

とする。

このとき、次のことは知られている。

1. [Ando and Okubo, LAA 147(1991)] A が ユニタリ、または エルミート のとき $\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w$ 。

2. [Mathias and Okubo, LAMA(to appear)] A が正規行列のときは、一般に $\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w$ は成り立たない。

3. [R. Mathias, SIAM J. Matrix Anal. Appli., 14(1993)] $C = [c_{ij}] \in M_n$ を $c_{i,i+1} = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $c_{n,1} = z$ $(|z| = 1)$, $c_{ij} = 0$ (それ以外の i, j) として、A が C の多項式で表されるとき、A は generalized z-circulant とよばれ、$\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w$ が成り立つ。

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき、$\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w = \frac{2}{\sqrt{3}}$ が成り立つ。

問題 $\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w$ が成り立つ A の特徴付けを与えよ。

問題 $A = [a_{ij}]$ を n 次の truncation matrix 、すなわち $a_{ij} = 1$ $(i \leq j)$, $a_{ij} = 0$ $(i > j)$ としたとき、$\|S_A\|_w$ を計算せよ。